"Vasile Alecsandri" University of Bacău
Faculty of Sciences
Scientific Studies and Research
Series Mathematics and Informatics
Vol. 19 (2009), No. 1, 33 - 48

PRESQUE CONTRE-CONTINUITE DANS LES STRUCTURES FLOUES MINIMAUX

MIHAI BRESCAN and CONSTANTIN G. POPA

Résumé. Le but du notre travail este de généraliser pour une structure floue minimale le concept de fonction presque contre-continue introduit dans la Topologie générale par Takashi Noiri et Valeriu Popa. Les plus importants résultats sont les théorèmes de caractérisations et les liaisons entre les différentes forme de presque contre-continuité et de faible continuité.

1. INTRODUCTION

Soient X un ensemble arbitraire non vide et l'intervalle $J = [0,1] \subset \boldsymbol{R}$. Un ensemble flou en X est une application $\lambda : X \to [0,1]$. On va noter par $\mathcal{F}(X)$ la classe des ensembles flous dans X. L'ensemble X, nommé l'espace X, sera identifié à la fonction constante **1** et l'ensemble vide Φ à la fonction constante **0**. Soient I un ensemble indexé et $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles flous en X. La réunion et l'intersection de cette famille, notées par $\bigcup_{i \in I} \lambda_i$, respectivement $\bigcap_{i \in I} \lambda_i$, on les définissent dans le mode suivant :

$$\left(\bigcup_{i \in I} \lambda_i\right)(x) = \sup_{i \in I}\{\lambda_i(x)\}, (\forall) x \in X \text{ et } \left(\bigcap_{i \in I} \lambda_i\right)(x) = \inf_{i \in I}\{\lambda_i(x)\}, (\forall) i \in I.$$

Évidemment, les définitions sont aussi valables pour le cas fini $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, mai les notations sont $\bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i$,respectivement $\bigcap_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\sup = \max$, $\inf = \min$.

Mots clef : Espace topologique flou, structure minimale floue, contre $\mathrm{F_m}$-continuité, presque contre $\mathrm{F_m}$- continuité, presque $\mathrm{F_m}$- continuité, faible $\mathrm{F_m}$-continuité, espace flou presque-régulier.
(2000) Mathematics Subject Classification : 54A40, 54A05

L'inclusion notée par $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ou $\lambda_2 \leq \lambda_1$, on la définit par $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$ et l'égalité, notée par $\lambda_1 = \lambda_2$, on la définit par $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, $(\forall) x \in X$. Évidemment $\lambda_1 = \lambda_2$ si et seulement si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et $\lambda_2 \leq \lambda_1$. La complémentaire de $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, notée par λ^c, on la définit par $\lambda^c = \mathbf{1} - \lambda$, $\lambda^c(x) = (\mathbf{1} - \lambda)(x) = 1 - \lambda(x)$, $(\forall) x \in X$.

Soient X et Y deux ensembles arbitraires nonvides, une application $f: X \to Y$ et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, $\mu \in \mathcal{F}(Y)$. L'image de λ est l'ensemble flou $f(\lambda) \in \mathcal{F}(Y)$ donné par

$$f(\lambda)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)}, \text{ si } f^{-1}(y) \neq \Phi, (\forall) y \in Y, \text{ ou } f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\} \\ 0, \text{au cas contraire} \end{cases}.$$

L'image inverse ou réciproque de μ est l'ensemble flou $f^{-1}(\mu) \in \mathrm{F}(X)$ donné par

$$f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)), (\forall) x \in X,$$

c'est-à-dire $f^{-1}(\mu) = \mu \circ f$, au sens de la composition ordinaire des fonctions ([8]) . Les propriétés de f et f^{-1} sont données dans le travails [8] et [15]. Un point flou x_α en X est un ensemble flou en X qui possède la valeur α dans le point $x \in X$ $(0 < \alpha \leq 1)$ et 0 dans tous les autres points de l'espace X; on dit que x_α a le support x (noté par $\mathrm{supp} x_\alpha = x$) et la valeur α ([11]) .

On peut écrire:

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, \text{ si } y = x \\ 0, \text{ si } y \neq x \end{cases}, y \in X.$$

Un ensemble flou est la réunion de tous ses points flous.

On dit que le point flou x_α appartient à l'ensemble flou $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ si $\alpha \leq \lambda(x)$, $(\forall) x \in X$ et nous noterons par $x_\alpha \in \lambda$.

A lieu la relation $x_\alpha \in \bigcup\limits_{i \in I} \lambda_i$ s'il existe $i_0 \in I$ tel que $x_\alpha \in \lambda_{i_0}$.

Si x_α est un point flou en X et $f: X \to Y$, alors $f(x_\alpha)$ est un point flou en Y; si $\mathrm{supp}\, x_\alpha = x$ alors $\mathrm{supp}(f(x_\alpha)) = f(x)$.

Si y_β est un point flou en Y, alors $f^{-1}(y_\beta)$ est un point flou en X; si yβ∈ $y_\beta \in f(X)$ et f est une injection. Dans ce cas, si $\mathrm{supp}\, y_\beta = y$, alors $\mathrm{supp}(f^{-1}(y_\beta)) = f^{-1}(y)$ ([15]). On dit que le point flou x_α est quasicoïncident (q-coïncident) à l'ensemble λ si $\alpha + \lambda(x) > 1, (\forall) x \in X$ et on va noter par $x_\alpha \; q \; \lambda$; au cas contraire on va noter par $x_\alpha \; \bar{q} \; \lambda$.

Les ensembles $\lambda, \mu \in \mathcal{F}(X)$ sont quasi-coïncidentes (q- coïncidentes) s'il y a $x \in X$ tel que $\lambda(x) + \mu(x) > 1$ et on va noter par $\lambda \; q \; \mu$.

Au cas contraire on va noter par $\lambda \; \bar{q} \; \mu$. Si λ et μ sont q-coïncidentes en x , alors $\lambda(x) \neq 0$, $\mu(x) \neq 0$ et donc $(\lambda \cap \mu)(x) \neq 0$ ([11]) .

Une topologie floue sur X (au sens Chang) est une famille $\tau \subseteq \mathcal{F}(X)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(T_1) $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \tau$;

(T_2) si $\delta_i \in \tau$, $i = \overline{1,n}$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} \delta_i \in \tau$;

(T_3) si $\delta_i \in \tau$, $i \in I$ alors $\bigcup_{i \in I} \delta_i \in \tau$.

Le couple (X, τ) est par la définition un espace topologique flou (au sens Chang) ou, en abrégé e.t.f. On appelle ensemble flou τ-ouvert chaque élément de τ et on appelle ensemble flou τ-fermé la complémentaire d'ensemble τ-ouvert ([8]) .

On définit l'intérieur et la fermeture de $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ respectivement par

$$\text{Int } \lambda = \mathring{\lambda} = \bigcup \; \{ \delta \mid \delta \leq \lambda, \delta \in \tau \} = \sup \{ \delta \mid \delta \leq \lambda, \delta \in \tau \}$$

$$\text{Cl } \lambda = \bar{\lambda} = \bigcap \; \{ \sigma \mid \sigma \geq \lambda, \sigma^c \in \tau \} = \inf \{ \sigma \mid \sigma \geq \lambda, \sigma^c \in \tau \} \text{ ([8])} .$$

L'ensemble $\lambda \in$F(X) est nommé F- régulier formé (respectivement F-régulier ouvert) si $\bar{\mathring{\lambda}} = \lambda$ (respectivement $\mathring{\bar{\lambda}} = \lambda$) ([2]) .

Un point flou x_α en X est nommé un point δ- adhérent (respectivement θ- adhérent) de $\lambda \in$F(X) si $\mathring{\bar{\mu}} \cap \lambda \neq 0$ (resp. $\bar{\mu} \cap \lambda \neq 0$) pour quel que soit μ avec $x_\alpha \in \mu$. L'ensemble de tous le points δ- adhérents (resp. θ- adhérents) de λ on l'appelle Fδ- fermeture (resp. Fθ - fermeture) et l'on note par F Cl_δ (λ) (resp. F $Cl_\theta(\lambda)$). L'ensemble λ est nommé Fδ- fermé (resp. Fθ- fermé) si λ= F $Cl_\delta(\lambda)$ (resp. λ= F $Cl_\theta(\lambda)$).

Soient un e.t.f. (X, τ) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors l'ensemble λ est nommé :

a) F-régulier fermé (resp. F régulier ouvert) si $\bar{\mathring{\lambda}}$ (resp. $\mathring{\bar{\lambda}}$) ([2]). ;

b) F demi-ouvert (resp. F préouvert, F α-ouvert, F β-ouvert ou F demi-préouvert) si $\lambda \leq \bar{\mathring{\lambda}}$ (resp. $\lambda \leq \mathring{\bar{\lambda}}$, $\lambda \leq \mathring{\bar{\mathring{\lambda}}}$, $\lambda \leq \bar{\mathring{\bar{\lambda}}}$) ([4]).

Les complémentaires de ces ensembles sont nommée respectivement: ensemble F demi-fermé (F préfermé, F α-fermé, F β-fermé, F demi-préfermé).

L'intersection de tous les ensembles F demi- fermés (resp. F-préfermés, Fα - fermés , Fβ - fermés) de l'espace X contenant λ est nommée F demi- fermeture (resp. la F préfermeture, la Fα - fermeture ,la Fβ - fermeture ou la F demi-préfermeture) de λ et les notations pour ces notions sont respectivement Fd- Cl λ (F pCl-λ ou F α - Cl λ, Fβ - Clλ).

La réunion de tous les ensemble F demi-ouverts (resp. F préouverts, Fα - ouverts , Fβ - ouverts) de l'espace X contenus dans λ est nommée le F demi- intérieur (resp. le F préintérieur, le Fα - intérieur, le Fβ - intérieur ou le F demi-préintérieur) de λ et les notations pour ces notions sont respectivement F d Intλ (F p Int λ , Fα -Int λ , Fβ -Intλ) .

Un point flou x_α en X est nommé un point δ-adhèrent pour l'ensemble λ si $\mathring{\nu}$ q λ pour tout ensemble τ-ouvert avec $x_\alpha \mathrm{q} \nu$. L'ensemble de tous les points δ-adhèrents pour λ est nommé la Fδ-fermeture de λ et on va noter par $\mathrm{FCl}_\delta \lambda$.

L'ensemble λ est nommé Fδ-fermé si $\lambda = \mathrm{FCl}_\delta \lambda$.

La complémentaire d'un ensemble Fδ-fermé est nommée un ensemble Fδ-ouvert. La réunion de tous les ensembles Fδ-ouverts contenus dans λ est nommée le Fδ-interieur de λ et on va noter par F $\mathrm{Int}_\delta \lambda$.

2. STRUCTURES FLOUES MINIMAUX

Les Professeurs Valeriu Popa (Université de Bacău - Roumanie) et Takashi Noiri (Yatsushiro College of Tehnology, Kumamoto - Japonie) ont developpé une très intéressante théorie unifiée aux principaux formes de continuité, basée sur le concept de *m*- structure (ou structure minimale) introduit par ces auteurs.

Comme une généralisation pour le domaine flou nous avons introduit la notion de structure floue minimale (ou $\mathrm{F_m}$-structure) dans le travail [6]. Nous remémorons ici quelque définitions et quelque lemmes et théorèmes de notre travail [6].

Définition 1. Soit $F(X)$ la classe des sous- ensembles de l'espace X. Une sous- famille $\mathcal{F}_{m_X} \subseteq \mathcal{F}(X)$ est nommée une structure floue minimale (en abrégé une $\mathrm{F_m}$- structure) si $\mathbf{0} \in \mathcal{F}_{m_X}$, $\mathbf{1} \in \mathcal{F}_{m_X}$. Le couple $(X, \mathcal{F}_{m_X})$ est par la définition un espace flou minimal ou $\mathrm{F_m}$- espace. L'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ est nommé $\mathrm{F_m}$- ouvert si $\lambda \in \mathcal{F}_{m_X}$, mais si $\lambda^c \in \mathcal{F}_{m_X}$ alors λ est nommé $\mathrm{F_m}$- fermé.

Remarque 1. Cette définition garde seulement condition de la définition d'une topologie floue au sens Chang.

Définition 2. Soient $X \neq \Phi$, $\mathcal{F}_{m_X}$ une $\mathbf{F}_\mathrm{m}$- structure sur X et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. On définissent la $\mathrm{F_m}$- fermeture, respectivement le $\mathrm{F_m}$- intérieur de λ dans le mode suivant :

1) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda} = \bigcap \ \{ \sigma \,|\, \lambda \leq \sigma,\ \sigma^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{m_X} \} = \inf \{ \sigma \,|\, \lambda \leq \sigma,\ \sigma^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{m_X} \}$;

2) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda} = \bigcup \ \{ \delta \,|\, \delta \leq \lambda, \delta \in \mathcal{F}_{m_X} \} = \sup \{ \delta \,|\, \delta \leq \lambda,\ \delta \in \mathcal{F}_{m_X} \}$.

On peut noter ces notions par $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Cl\,\lambda$, respectivement $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Int\lambda$.

Lemme 1. *Soient* $X \neq \Phi$, $\mathcal{F}_{m_X}$ *une* $\mathbf{F}_\mathrm{m}$- *structure sur* X *et* λ, $\mu \in \mathcal{F}(X)$. *Alors sont vraiment les affirmations suivantes:*

1) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda^c} = (\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda})^{\mathrm{c}}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda}{}^{\mathrm{c}} = (\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda})^{\mathrm{c}}$;

2) si $\lambda^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{m_X}$ alors $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda} = \lambda$ et si $\lambda \in \mathcal{F}_{m_X}$ alors $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda} = \lambda$;

3) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$;

4) si $\lambda \leq \mu$ alors $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda} \leq \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\mu}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda} \leq \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\mu}$;

5) $\lambda \leq \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda} \leq \lambda$;

6) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{(\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda})} = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Int\,(\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda}) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overset{\circ}{\lambda}$.

Lemme 2. *Soient* $(X, \mathcal{F}_{m_X})$ *un* $\mathbf{F}_\mathrm{m}$- *espace,* $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ *et* x_α *un point flou en* X. *Alors* $x_\alpha \in \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \overline{\lambda}$ *si et seulement si* $\mu\, q\, \lambda$ *pour tout ensemble* $\mu \in \mathcal{F}_{m_X}$ *avec* $x_\alpha\, q\, \mu$.

Définition 3. On dit que $\mathcal{F}_{m_X}$ a la propriété (B) si $(\delta_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}_{m_X}$ implique $\bigcup_{i\in I} \delta_i \subseteq \mathcal{F}_{m_X}$.

Remarque 2. Cette définition corresponde aux conditions (T_1) et (T_3) de définition d'une topologie floue (au sens Chang).

Remarque 3. Pour une $\mathbf{F}_m$- structure avec la propriété (B) on peut utiliser le terme de supratopologie floue. ([10]). En ce cas les éléments de la supratopologie sont nommés ensembles flous supraouverts et leur complémentaires sont nommées ensembles flous suprafermes ([10]).

Par analogie avec les definitions connues on peut defini la suprafermeture et le supraintérieur d'un ensemble flou.

Théorème 1. Pour une structure floue minimale $\mathcal{F}_{m_X}$ les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}_{m_X}$ est une supratopologie floue sur X;

2) si $\mathbf{F}_{m_X}$ - $\overset{\circ}{\lambda} = \lambda$ alors $\lambda \in \mathcal{F}_{m_X}$;

3) si $\mathbf{F}_{m_X}$ - $\bar{\mu} = \mu$ alors $\mu^c \in \mathcal{F}_{m_X}$.

Lemme 3. *Soient X un ensemble non vide et $\mathcal{F}_{m_X}$ une supratopologie floue sur X et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors :*

1) $\lambda \in \mathcal{F}_{m_X}$ si et seulement si $\mathbf{F}_{m_X}$ - $\overset{\circ}{\lambda} = \lambda$;

2) λ est $\mathbf{F}_{m_X}$ - fermé si seulement si $\mathbf{F}_{m_X}$ - $\bar{\lambda} = \lambda$;

3) $\mathbf{F}_{m_X}$ - $\overset{\circ}{\lambda} \in \mathcal{F}_{m_X}$ et $\mathbf{F}_{m_X}$ - $\bar{\lambda}$ est $\mathbf{F}_{m_X}$ - fermé.

Définition 4. Soient l'espace flou minimal $(X, \mathcal{F}_{m_X})$ et l'espace topologique flou (Y, t). La fonction $f : (X, \mathcal{F}_{m_X}) \to (Y, t)$ on appelle $\mathbf{F}_m$-continue (floue) si pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble $\nu \in t$ avec $f(x_\alpha) q\, \nu$ il existe $\delta \in \mathcal{F}_{m_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta) \leq \nu$.

La théorème suivant représente un théorème de caractérisation pour les fonctions $\mathbf{F}_m$- continues (floues).

Théorème 2. *Soient l'espace flou minimal $(X, \mathcal{F}_{m_X})$, l'espace topologique flou (Y, t) et la fonction $f : (X, \mathcal{F}_{m_X}) \to (Y, t)$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) f est $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - continue (floue);
2) $f^{-1}(\nu)=\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ - Int $f^{-1}(\nu)$, $(\forall)\,\nu \in t$;
3) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ - $\overline{f^{-1}(\sigma)} = f^{-1}(\sigma)$, $(\forall)\sigma \in \mathcal{F}(Y)$ où $\sigma^{c} \in t$;
4) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ - $\overline{f^{-1}(\mu)} \le f^{-1}(\bar{\mu}),(\forall)\mu \in \mathcal{F}(Y)$;
5) $f(\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - \bar{\lambda}) \le \overline{f(\lambda)}$, $(\forall)\lambda \in \mathcal{F}(X)$;
6) $f^{-1}(\mathring{\mu}) \le \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ - *Int* $f^{-1}(\mu),(\forall)\mu \in \mathcal{F}(Y)$.

3. PRESQUE CONTRE- CONTINUITE POUR UNE $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - STRUCTURE

Soient (X,τ) et (Y,t) deux espace topologique flous.

Définition 5. on dit que la fonction $f:(X,\tau)\to (Y,t)$ est contre-continue (floue) si $f^{-1}(\nu)$ est τ -fermé pour tout ensemble ν t-ouvert ([7]).

Nous introduirons ici la définition suivante.

Définition 6. On dit que la fonction $f:(X,\tau)\to (Y,t)$ est F presque contre-continue (resp. F presque contre-précontinue, F contre presque β-continue, F presque contre super-continue) si $f^{-1}(\sigma)$ est τ -fermé (resp. τ -preférmé, τ β-fermé, τ δ-fermé) pour tout ensemble σ F-régulier ouvert en Y.

Nous introduirons ici les définitions corespondantes pour une $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-structure.

Définition 7. Soient l'espace minimal $(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X})$, l'espace topologique flou (Y,t) et la fonction $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X})\to (Y,t)$. On dit que la fonction *f* est $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue (respectivement presque $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue, faible $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue) si pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble ν t-ouvert avec $f(x_\alpha)\, q\, \nu$, il existe $\delta \in \mathcal{F}_{m_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta)\le \nu$ (resp. $f(\delta)\le \mathring{\nu}$, $f(\delta)\le \bar{\nu}$)

Définition 8. On dit que la fonction $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X})\to (Y,t)$ est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue (resp. contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue) si $f^{-1}(\mu) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ - $\overline{f^{-1}(\mu)}$ pour tout ensemble μ F-regulier ouvert (resp. ouvert) en (Y,t).

Définition 9. On dit que la fonction $f:\left(X,\mathcal{F}_{m_X}\right)\rightarrow(Y,t)$ est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue dans le point flou x_α en X si pour tout ensemble σ F-régulier fermé avec $f(x_\alpha)\,q\,\sigma$, il existe l'ensemble $\delta\in\mathcal{F}_{m_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta)\le\sigma$

En partant de travail [13] nous introduirons maintenant la suivante

Définition 10. Soient un e.t.f. (X,τ) et $\lambda\in\mathcal{F}(X)$. L'ensemble noté par $FrKer(\lambda)$ est défini par

$$FrKer(\lambda)=\bigcap\{\rho|\rho\ge\lambda,\ \rho \text{ F régulier ouvert en } (X,\tau)\}$$

est nommé le Fr-noyau de λ (kernel en anglais).

Par analogie avec [9] on a bien

Lemme 4. *Soient l'espace topologique flou (X,τ) et $\lambda,\mu\in\mathcal{F}(X)$. Alors :*

1) $x_\alpha \epsilon\ FrKer(\lambda)$ si et seulement si $\lambda\ \ q\ \sigma$ pour tout ensemble σ- F-régulier fermé avec $x_\alpha\ q\sigma$;

2) si λ est F-régulier ouvert en (X,τ), alors $\lambda=FrKer(\lambda)$;

3) si $\lambda\le\mu$, alors $FrKer(\lambda)\le FrKer(\mu)$.

Le théorème suivant représente un théorème de caractérisation pour les fonctions presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue.

Théorème 3. *Soit la fonction $f:\left(X,\mathcal{F}_{m_X}\right)\rightarrow(Y,t)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue ;

2) $f^{-1}(\sigma)=\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$- $Int(f^{-1}(\sigma))$ pour tout ensemble σ F-régulier fermé en (Y,t);

3) pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble σ F-régulier fermé en (Y,t) avec $f(x_\alpha)\,q\sigma$ il existe $\delta\in\mathcal{F}_{m_X}$ avec $x_\alpha\ q\delta$ tel que $f(\delta)\le\sigma$;

4) $f(\,\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}\bar{\lambda}\,)\le FrKer(f(\lambda))$, $(\forall)\,\lambda\in\mathcal{F}(X)$;

5) $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$- $\overline{f^{-1}(\mu)}\le f^{-1}(FrKer(\mu))$, $(\forall)\,\mu\in\mathcal{F}(Y)$.

Démonstration: (1) => (2). Soit σ un ensemble F-régulier fermé en (Y,t), donc σ^{c} est F-régulier ouvert en (Y,t) et comme f est presque contre F_m- continue il en resulte que $f^{-1}(\sigma^c)= \mathbf{F}_{m_X} - \overline{f^{-1}(\sigma^c)}$. Après le Lemme 1 on a bien $(f^{-1}(\sigma))^c= (\mathbf{F}_{m_X} - Int(f^{-1}(\sigma))^c$, donc

$$f^{-1}(\sigma)=\mathbf{F}_{m_X} - Int(f^{-1}(\sigma)).$$

(2) => (3). Soient x_α un point flou en X et $\sigma \in \mathcal{F}(Y)$ un ensemble F-régulier fermé avec $f(x_\alpha)q\sigma$, donc $f(x_\alpha)\in\sigma$ et d'ici $x_\alpha \in f^{-1}(\sigma)$. Après (2) $x_\alpha \in \mathbf{F}_{m_X}$ - $Int\ f^{-1}(\sigma)$ et alors il existe $\delta \in \mathcal{F}_{m_X}$ avec $x_\alpha\ q\sigma$ donc $x_\alpha \in \delta$ et donc $x_\alpha \in \delta \le f^{-1}(\sigma)$, par conséquence $x_\alpha \in \delta$ et $f(\delta)\le\sigma$.

(3) => (4). Soient $\lambda \in \mathcal{F}(X)$, $x_\alpha \in \mathbf{F}_{m_X} - \bar{\lambda}$ et $\sigma \in \mathcal{F}(Y)$ un ensemble F-régulier fermé avec $f(x_\alpha)\ q\ \sigma$. De (3) il existe $\delta \in \mathcal{F}_{m_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta)\le\sigma$, donc $x_\alpha \in \delta \le f^{-1}(\sigma)$. Après la Lemme 2 $\delta\ q\ \lambda$ et donc $\mathbf{0}\ne f(\delta\cap\lambda)\le f(\delta)\cap f(\lambda)\le \sigma \cap f(\lambda)$ et après la Lemme 4 (1) on a bien $f(x_\alpha)\in FrKer(\lambda)$ et donc $f(\mathbf{F}_{m_X} - \bar{\lambda})\le FrKer(f(\lambda))$.

(4) => (5). Si $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ alors de (4) et la Lemme 4, on a bien $f(\mathbf{F}_{m_X} - \overline{\overset{-1}{f}(\mu)}) \le FrKer(\mu)$ et donc $\mathbf{F}_{m_X} - \overline{\overset{-1}{f}(\mu)} \le f^{-1}(FrKer(\mu))$.

(5) => (1). Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ F régulier ouvert. Alors de (5) et la Lemme 4 on a bien $\mathbf{F}_{m_X} - \overline{\overset{-1}{f}(\nu)} \le f^{-1}(FrKer(\mu))= f^{-1}(\mu)$.

Après la Lemme 1, on a bien $\mathbf{F}_{m_X} - \overline{\overset{-1}{f}(\mu)} = f^{-1}(\mu)$, ce qui montre que f est presque contre $\mathbf{F}_m$ - continue.

Corollaire 1. *Soit $(X,\mathcal{F}_{m_X})$ un espace supratopologiqueflou. Alors, pour la fonction $f:(X,\mathcal{F}_{m_X}) \to (Y,t)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est presque contre $\mathbf{F}_m$-continue ;

2) $f^{-1}(\sigma)\in\mathcal{F}_{m_X}$ pour tout ensemble σ F régulier fermé ;

3) $f^{-1}(\mu)$ est $\mathbf{F}_{m_X}$ - fermé en $(X,\mathcal{F}_{m_X})$ pour tout ensemble μ F régulier ouvert en (Y,t).

La démonstration résulte immédiatement de la Th. 3 et la Lemme 3.

Théorème 4. *Soit la fonction* $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}) \to (Y,t)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) f este presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- continue ;*
2) $f^{-1}(\overline{\mu}) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int(f^{-1}(\overline{\mu}))$ *pour tout ensemble* $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ *F* β*-ouvert;*
3) $f^{-1}(\overline{\mu}) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int(f^{-1}(\overline{\mu}))$ *pour tout ensemble* $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ *F demi-ouvert;*
4) $f^{-1}(Int(\overline{\mu})) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Cl(f^{-1}(Int(\overline{\mu})))$ *pour tout ensemble* $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ νF *– préouvert.*

Démonstration. $(1)\Rightarrow(2)$. Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ F β-ouvert. En appliquant le Th. 2.4 ([4]) il suit que $\overline{\mu}$ est un ensemble F régulier fermé. Après le Th. 3 ([2]), $f^{-1}(\overline{\mu}) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int(f^{-1}(\overline{\mu}))$.
$(2)\Rightarrow(3)$. C'est évidemment parce que tout ensemble F β demi-ouvert est F β-ouvert (a voir Déf. b) Introduction).
$(3)\Rightarrow(4)$. Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ F préouvert. Il suive que $\left(\overset{\circ}{\mu}\right)^c$ est F régulier fermé et donc F demi-ouvert (Th. 2 [4]). Alors, on a bien

$$\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right)\right)^c = f^{-1}\left(\left(\overset{\circ}{\mu}\right)^c\right) = f^{-1}\left(\overline{\left(\overset{\circ}{\mu}\right)^c}\right) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}$$

$$Int\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right)\right)^c = \left(\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Cl\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right)\right)\right)^c,$$

d'ou il résulte que $f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Cl\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right)\right)$.
$(4)\Rightarrow(1)$. Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ F régulier fermé, d'où μ est F préouvert et donc

$$f^{-1}(\mu) = f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Cl\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\mu}\right)\right) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X} - Cl(f^{-1}(\mu))$$

et donc *f* est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - continue.

Corollaire 2. *Soit* $(X,\mathcal{F}_{m_X})$ *un espace supratopologique et* (Y,t) *un espace topologique flou. Alors, pour la fonction* $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}) \to (Y,t)$ *les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(1) f est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- continue ;*

(2) $f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)$ *est* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ *-ouvert pour tout ensemble* μ *F* β *-ouvert en* Y *;*

(3) $f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)$ *est* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ *-ouvert pour tout ensemble* μ *F demi-ouvert en* Y *;*

(4) $f^{-1}\left(\underline{\overset{\circ}{\mu}}\right)$ *est* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}$ *-fermé pour tout ensemble* μ *F préouvert en* Y *.*

La démonstration résulte immédiatement en appliquant le Th. 4 et la Lemme 3.

Dans le travail ([5]) nous avons étudié les fonctions floues irrèsolutes et les fonctions floues quasi-irrèsolutes. Mais en opartant de travail [14] nous introduirons ici la notion de fonction $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - quasi-irrèsolute par la

Définition 11. La fonction $f:\left(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right)\rightarrow(Y,t)$ est nommée une fonction $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - quasi-irrèsolute si pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble F demi-ouvert $\mu\in\mathcal{F}(Y)$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ il existe l'ensemble $\delta\in\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta)\leq\overline{\mu}$.

Nous démontrerons maintenant que les concepts de fonction presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - continue et de fonction $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - quasi-irrèsolute sont équivalentes.

Théorème 5. *La fonction* $f:\left(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right)\rightarrow(Y,t)$ *est presque contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- continue si et seulement si f est* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- quasi-irrèsolute.*

Démonstration. Nécessité. Soient le point flou x_α et l'ensemble μ de la Déf. 11. Alors, après le Th. 4 (3) $f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)=\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)\right)$ et parce que $x_\alpha\in f^{-1}(\mu)$, $x_\alpha\in\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)\right)$ et donc il existe $\delta\in\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ et donc $x_\alpha\in\delta\leq f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)$ et d'ici $f(\delta)\leq\overline{\mu}$ et donc *f* est $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - quasi-irrèsolute.

Suffisance. Soient $\mu\in\mathcal{F}(Y)$ F-régulier fermé et $x_\alpha\in f^{-1}(\mu)$. Alors μ est un ensemble F demi-ouvert (Th. 2 [4]) avec $f_\alpha\ q\ \mu$ et donc il existe $\delta\in\mathcal{F}(Y)$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$, donc $x_\alpha\in\delta$ tel que $f(\delta)\leq\overline{\mu}=\mu$. Alors $x_\alpha\in\delta\leq f^{-1}(\mu)$ et donc $x_\alpha\in\delta\leq\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)\right)$. Par consequence, on a bien que $f^{-1}(\mu)\leq\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)\right)$ et après la Lemme 1 $f^{-1}(\mu)=\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}\left(\overline{\mu}\right)\right)$ et après le Th. 3, il suit que la fonction *f* est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ - continue.

En suite, nous étudierons les liaisons entre la notion de presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ -continuité et autres notions importantes.

Théorème 6. *Soient les espaces* $\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right)$, (Y,t) *avec les significations connues et la fonction* $f:\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right) \to (Y,t)$. *Si f est presque contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-continue, alors f est faiblement* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-continue.*

Démonstration. Soient x_α un point flou en X et μ un ensemble *t*-ouvert avec $f(x_\alpha)\, q\, \mu$ et parce que *f* est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue, après le Th. 3 (3) il existe $\delta \in \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta) \le \mu \le \overline{\mu}$ et donc *f* est faiblement $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue.

Corrolaire 3. *Si la fonction* $f:\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right) \to (Y,t)$ *est contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-continue, alors f est faiblement* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-continue.*

Remarque 4. Ce corollaire est le Th. 4 de travail [7].

Définition 12. (Déf. 16, []). La fonction $f:\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right) \to (Y,t)$ est nommée presque $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-ouverte si $f(\delta) \le Int\left(\overline{f(\delta)}\right), (\forall)\, \delta \in \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}$.

Théorème 7. *Si la fonction* $f:\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right) \to (Y,t)$ *est presque* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-ouverte et presque contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- continue, alors f est presque* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- continue.*

Démonstration. Soit *f* une fonction $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue. Alors, après le Th. 6 *f* est faiblement $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue. Si x_α est un point flou en X et $\mu \in t$ avec $f(x_\alpha)\, q\, \mu$, alors il existe $\delta \in \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta) \le \overline{\mu}$. Parce que *f* est presque $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-ouverte $f(\delta) \le Int\left(\overline{f(\delta)}\right) \le Int\left(\overline{\mu}\right)$ et donc *f* est presque $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue.

Corollaire 4. *Si* $f:\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right) \to (Y,t)$ *est presque* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*- ouverte et contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*- continue, alors f est presque* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ *- continue.*

Remarque 5. Ce Corollaire et le Th. 5 de travail [7].

Définition 13. L'espace flou (Y,t) est nommé un espace F presque-régulier si pour tout point flou y_α en Y et pour tout ensemble $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ F-regulierement ouvert avec $y_\alpha \in \mu$ il y a un ensemble flou $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ F-regulierement ouvert tel que $y_\alpha \in \lambda \le \overline{\lambda} \le \mu$.

Remarque 6. Si λ est F-regulierement ouvert, alors λ est *t*-ouvert (voir [2]).

Théorème 8. *Si la fonction* $f:\left(X, \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}\right) \to (Y,t)$ *est presque contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*- continue et* (Y,t) *est un espace F presque- régulier, alors f est presque* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*- continue.*

Démonstration. Soit x_α un point flou en *X*, donc $f(x_\alpha)$ est un point flou en *Y*. Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ *t*-ouvert avec $f(x_\alpha) \in \mu$. Parce que (Y,t) est un espace F presque- régulier, il existe $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ F-régulierement ouvert tel que $f(x_\alpha) \in \lambda \le \overline{\lambda} \le Int(\overline{\mu})$ (Voir Déf. 13). Parce que *f* est presque contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue et $\overline{\lambda}$ est F-régulièrement ouvert en *Y* (voir [4]) alors, apres le Th. 3, il existe $\delta \in \mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}$ avec $x_\alpha \in \delta$ tel que $f(\delta) \le \overline{\lambda}$ et donc $f(\delta) \le Int(\overline{\mu})$, ce qui montre que *f* est presque $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue.

Corollaire 5. Si la fonction $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}) \to (Y,t)$ est contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue et (Y,t) est un espace F presque-régulier, alors *f* est presque $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-continue.

Remarque 7. ce Corollaire est le Th. 6 de travail [7].

Définition 14. On dit que la fonction $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}) \to (Y,t)$ satisfait à la condition de $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$-intérieurité si $\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\overline{\mu})\right) \le f^{-1}(\mu)$ pour tout ensemble μ *t*-ouvert.

Théorème 9. *Si la fonction* $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}) \to (Y,t)$ *est presque contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- *continue et satisfait à la condition de* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-intérieurité, alors f est* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- *continue.*

Démonstration. Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ un ensemble *t*-ouvert. Parce que *f* est contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue, après le Th. 3 et la Lemme 1 on a bien $f^{-1}(\mu) \le f^{-1}(\overline{\mu}) \le \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\overline{\mu})\right) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int(\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\overline{\mu})\right)) \le \quad \le \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\mu)\right) \le f^{-1}(\mu)$. Par consequence, $f^{-1}(\mu =)\ \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\mu)\right)$, et donc *f* est $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue.

Corollaire 6. *Si la fonction* $f:(X,\mathcal{F}_{\mathrm{m}_X}) \to (Y,t)$ *contre* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- *continue et satisfait à la condition de* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$*-intérieurité, alors f est* $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- *continue.*

Démonstration. Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ un ensemble *t*-ouvert. Parce que *f* est contre $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue, il en résulte après le Th. 3 et la Lemme 1 ([7]),

$$f^{-1}(\mu) \le f^{-1}(\overline{\mu}) \le \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\overline{\mu})\right) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int(\mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\overline{\mu})\right)) \le \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\mu)\right) \le f^{-1}(\mu),$$

et d'ici $f^{-1}(\mu) = \mathbf{F}_{\mathrm{m}_X}\text{-}Int\left(f^{-1}(\mu)\right)$ et donc, après le Th. 2 [7] il suit que *f* est $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$- continue.

Bibliographie

[1] Akdag, Metin: **Almost Forms of Some Fuzzy Continuities**, Transaction of Academy of Sciences of Azerbadjan, Series of Physical and Mathematical Sciences, Nr 2,3, p. 70- 76, 2000.

[2] Azad, K. K.: **On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzyy Weakley Continuity**, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 82, p. 14- 32, 1981.

[3] Brescan, M.: **Sur quelques propriétés de séparation dans les espaces topologiques flous**, Studii şi Cercetări Ştiinţifice, Seria: Matematică, p. 43-54, Nr. 3, (1993), Universitatea din Bacău.

[4] Brescan, M.: **Espaces topologiques flou demi-T_2**, Studii şi Cercetări Ştiinţifice, Seria: Matematică, p. 55-72, Nr. 6, (1996), Universitatea din Bacău.

[5] Brescan, M.: **Applications floues irrésolutes. Applications floues quasi- irrésolutes**, Studii şi Cercetări Ştiinţifice, Seria: Matematică, p. 9-18, Nr. 8, (1998), Universitatea din Bacău.

[6] Brescan, M.: **Structures Floues Minimaux**, Buletinul Universităţii "Petrol- Gaze", Ploieşti, vol. LIII, Seria Matematică - Informatică, Nr.1, 2001.

[7] Brescan, M.: **Contre-Continuité dans les Structures Floues Minimaux** (au cours d'apparition en Buletinul Universităţii "Petrol-Gaze", Ploieşti, vol. LIII, Seria Matematică- Informatică, Nr.2, 2008.

[8] Chang, C. L.: **Fuzyy Topological Spaces**, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 43, p. 734- 742, 1973.

[9] Ekici, E.: **Another form of contra-continuity**, Kochi Journal Mathematical, 1 (2006), p. 21-29.

[10] Min, W. K.; Park, C. K.: **On Fuzzy M - Sets and Fuzzy M – Continuity,** International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, vol. 5, Nr. 1, p. 59-63, March 2005.

[11] Ming, P. P.; Ming, L. Y.: **Fuzzy Topology I. Neigborhood Structure of a Fuzzy Point**, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 77, p. 20-37, 1980.

[12] Popa, V.; Noiri, T.: **On M - Continuous Functions**, Analele Universităţii "Dunărea de Jos", Galaţi, Fasc.II, anul XVIII, p. 31- 41, 2000.

[13] Noiri, T.; Popa, V.: **An Unified Theory of Contra - Continuity for Functios,** Annales Univ. Sci. Budapest, 44, p. 115- 137, 2002.

[14] Noiri, T.; Popa, V.: **A Unified Theory of Almost Contra-Continuity for Functions**, Kochi Journal of Mathematics, Vol. 3, March 2008, p. 125-138.
[15] Tuna, H.; Yalvaç, S.: **Fuzzy Sets and Functions of Fuzzy Spaces,** Journal of Mathematical Analysis and Applications, 126, p. 409- 423, 1987.

Department of Mathematics,
"Petroleum-Gas" University of Ploieşti
Bd. Bucureşti 39, Ploieşti, ROMANIA
mate@upg-ploiesti.ro